УДК 373.167.2:51

О РАСПОЗНАВАНИИ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Дятлов В.Н., кандидат физико-математических наук, доцент,
Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ,
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
vndyatlov@gmail.com

Дмитриева Ю.А., старший преподаватель,
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
yudmitrieva@gmail.com

Аннотация. Описаны признаки применимости методов для решения задач с параметрами.

Ключевые слова: распознавание применимости методов, задачи с параметром.

CRITERIA FOR APPLICABILITY OF METHODS FOR SOLVING PROBLEMS WITH PARAMETERS

V.N. Dyatlov, associate professor,
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk
vndyatlov@gmail.com

Yu.A. Dmitrieva, assistant professor,
Novosibirsk State University, Novosibirsk
yudmitrieva@gmail.com

Abstract. We describe some criteria for applicability of methods for solving problems with parameters.

Keywords: criteria for applicability of methods, problems with parameter.

Одна из причин затруднений, возникающих при решении задач с параметрами, состоит в слабом развитии механизмов выбора методов для решения той или иной задачи и отсутствии отличительных особенностей применимости каждого из методов. Большинство пособий, посвященных задачам с параметрами, устроены по принципу ``от метода к задаче'', т. е. дается какой-то метод решения и приводится набор задач, решаемых данным методом. Более того, обычно не обсуждается эффективность разных методов, которые могут быть применены для решения поставленной задачи. Подготовка учащихся к решению задач с параметрами обычно основана на изучении определенного набора методов, и если на экзамене попадается задача, выходящая за его пределы, то трудно ожидать успехов в ее решении.

Для повышения эффективности обучения решению задач с параметрами предлагается изменить направление обучения, перейдя к использованию принципа ``от задачи к выбору метода''. Разумеется, на первом этапе необходимо освоение минимального набора методов и решение определенного набора задач, на котором каждый из методов осваивается. Однако на втором этапе необходимо обучать выбору метода решения при данной задаче, и тогда возникает потребность в механизмах распознавания применимости методов для решения поставленной задачи.

В статье [1] была изложена система изучения задач с параметрами, позволяющая рассматривать этот материал как часть школьного курса математики. В частности, были отмечены требования, выполнение которых желательно для включения какой-либо темы, в частности задач с параметрами, в программу школьного курса математики в качестве элективного курса или в виде раздела общего курса. Среди них отмечена необходимость изложения методов, применяемых при анализе задач каждого класса, и особенно присутствие признаков применимости методов для решения поставленной задачи.

Если в задаче идет речь о соотношении с параметром, т. е. об описании семейства множеств, заданных путем указания выраженных с помощью равенств или неравенств свойств, которыми обладают их элементы, то среди постановок задач были отмечены следующие:

* решение соотношения, т.е. при каждом значении параметра нахождение множества решений;

* исследование количественных характеристик множеств решений (при каких значениях параметра соотношение имеет определенное число решений);

* исследование качественных свойств, например, когда множество решений будет промежутком или промежутком определенной длины и т.п.;

* исследование вопросов, связанных с пересечением или объединением множеств решений, соответствующих разным значениям параметра;

* при рассмотрении двух соотношений изучение взаимодействия множеств их решений, например, выяснение, при каких значениях параметра одно из множеств содержится в другом или их пересечение непусто и т.д.

Каждая из постановок допускает достаточно регулярные средства ее анализа. Среди всевозможных методов анализа задач для соотношений можно выделить

(1) аналитический,

(2) графический с использованием плоскости ``переменная – параметр'',

(3) графический с использованием плоскости переменных или плоскости ``переменная – значение'',

(4) использование свойств функций, участвующих в задании соотношения.

Для каждого из указанных методов сформулируем отличительные особенности применимости метода к анализу данной задачи. Как правило, эти особенности легко обнаруживаются, и тогда можно мотивированно выбирать средства для решения задачи.

(1) Аналитический метод подразумевает непосредственное решение соотношения, т.е. поиск наиболее простого способа описания задаваемого соотношением множества при каждом значении параметра. Здесь имеется в виду организация процесса решения, в котором учитываются все обстоятельства, связанные с параметром и вызванные имеющимися в соотношении ограничениями или условиями выполнимости необходимых для решения действий. Отличительная особенность применимости этого средства состоит в оценке реальности выражения переменной через параметр. Кроме того, о применении исключительно этого средства говорит постановка задачи, если в ней требуется решить соотношение, т.е. при каждом значении параметра указать множество решений.

(2) Применение графики, связанной с плоскостью ``переменная – параметр'', в принципе возможно лишь в том случае, если переменная одна и параметр один. Только в этом случае есть принципиальная возможность изображения множества, задаваемого данным соотношением, на плоскости ``переменная – параметр''. Однако это не единственное ограничение применимости такого метода. Еще одно ограничение связано с реализацией такого изображения, ибо далеко не всякое соотношение может быть изображено на плоскости ``переменная – параметр'' с использованием доступных учащемуся средств. Среди признаков применимости служит присутствие в соотношении либо параметра, либо переменной в первой степени и возможность выражения соответствующей величины в виде функции, график которой реально изобразить. Еще один признак применимости состоит в наличии особенностей, связанных с уравнением прямой или окружности.

Надо иметь в виду, что к графике вообще можно прибегать лишь в тех случаях, когда в задаче требуется ответить на какой-то вопрос, связанный с множеством решений. Решить соотношение только с использованием графики нельзя, хотя проверить правдоподобность ответа или увидеть путь решения можно.

Одним из преимуществ использования плоскости ``переменная – параметр'' является то, что ответить на самые разнообразные вопросы, связанные с соотношением, можно с использованием изображения лишь одного множества на плоскости, тогда как применение плоскости ``переменная – значение'' или плоскости переменных всегда предполагает анализ взаимодействия семейств множеств, что представляет для учащихся большие трудности по сравнению с получением информации на основе одного множества.

(3) Графика на плоскости ``переменная – значение'' или на плоскости переменных применима в следующих ситуациях.

Во-первых, когда в соотношении две переменные, т.е. когда рассматривается система уравнений и/или неравенств с двумя переменными. В таком случае изучается вопрос возможности изображения (семейств) множеств, описываемых составляющими систему соотношениями на координатной плоскости переменных. Обычно в качестве таких множеств оказываются прямые, окружности, параболы или гиперболы, т.е. те множества, которые изучаются в школьном курсе математики. Конечно, надо обращать внимание на особенности соотношений, приводящих к соответствующим множествам.

Во-вторых, если в уравнении или неравенстве одна переменная и один параметр и есть возможность представить соотношение в виде сопоставления двух функций, для которых либо нетрудно изобразить их графики, либо возможно установить свойства этих функций, позволяющие дать ответ на вопрос задачи. В этом случае обычно соотношение представляют в таком виде, чтобы в одной его части не было параметра, а в другой собирается все связанное с параметром. Тем самым появляется одно множество, представляющее собой график одной функции, а также семейство множеств, изображающих графики семейства функций.

При использовании графических средств вопрос задачи переводится на теоретико-множественный язык, на этом языке вырабатывается процедура ответа на вопрос задачи, которая затем переводится на аналитический язык, т.е. формулируется в терминах соотношений (уравнений или неравенств), в которых в качестве переменной участвует параметр исходной задачи.

(4) К использованию свойств функций прибегают в тех случаях, когда надо ответить на какой-то связанный с соотношением вопрос. Вряд ли можно привести общего вида признаки применения свойств функции, однако в каких-то частных ситуациях что-то порекомендовать можно.

Свойство четности функции может быть использовано в вопросах о количестве корней уравнения. А именно, четная функция в ненулевых точках может обращаться в нуль лишь четное число раз. Стало быть, если у четной функции нечетное число нулей, то она с необходимостью обращается в нуль в нулевой точке, и это служит поводом для выделения множества значений параметра, среди которых расположены искомые.

Встречается использование монотонности для ответа на вопрос задачи. Однако это свойство носит достаточно яркий наглядный характер и обычно сопровождает графические средства, связанные с плоскостью ``переменная – значение''.

Обращение к свойствам функций неизбежно в постановках задач, в которых речь идет не о семействе соотношений, т. е. о семействе описываемых ими множеств, а о семействе функций. В таком случае обычно свойства функции участвуют в условии задачи и возможность их применения для решения достаточно очевидна. Здесь могут возникнуть проблемы с обоснованием наличия тех или иных свойств у конкретных участвующих в формулировке задачи функций, но это разговор на другую тему.

В заключение отметим, что для формирования навыков в выборе пути решения задачи с параметром требуются знания, связанные с различными весьма важными для математики понятиями и объектами, что, в свою очередь, стимулирует глубокое изучение соответствующих разделов школьного курса и служит основой для успешного продолжения образования по специальностям, в образовательных программах которых присутствует математика.

Связанный с тематикой этой статьи материал более подробно, с рассмотрением примеров и различных типов рассуждений, изложен в [2--4].

Литература

1. Дятлов В.Н., Дмитриева Ю.А. Задачи с параметром как раздел школьного курса математики // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2016): материалы VI Международной научно-практической конференции, 25-26 ноября 2016 года/ Отв. ред. Н.В. Тимербаева. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2016. – С. 43-45.

2. Дятлов В.Н. Технологии решения задач. Лекция 12. Задачи с параметрами. Анализ семейств функций или множеств. Поиск пути решения // Математика: Методический журнал для учителей математики. 2013. – № 5. – С. 52-58.

3. Дятлов В.Н. Как научить решать задачи с параметрами. Лекции 1--4. М.: Педагогический университет ``Первое сентября'', 2014.

4. Дятлов В.Н. Как научить решать задачи с параметрами. Лекции 5--8. М.: Педагогический университет ``Первое сентября'', 2014.